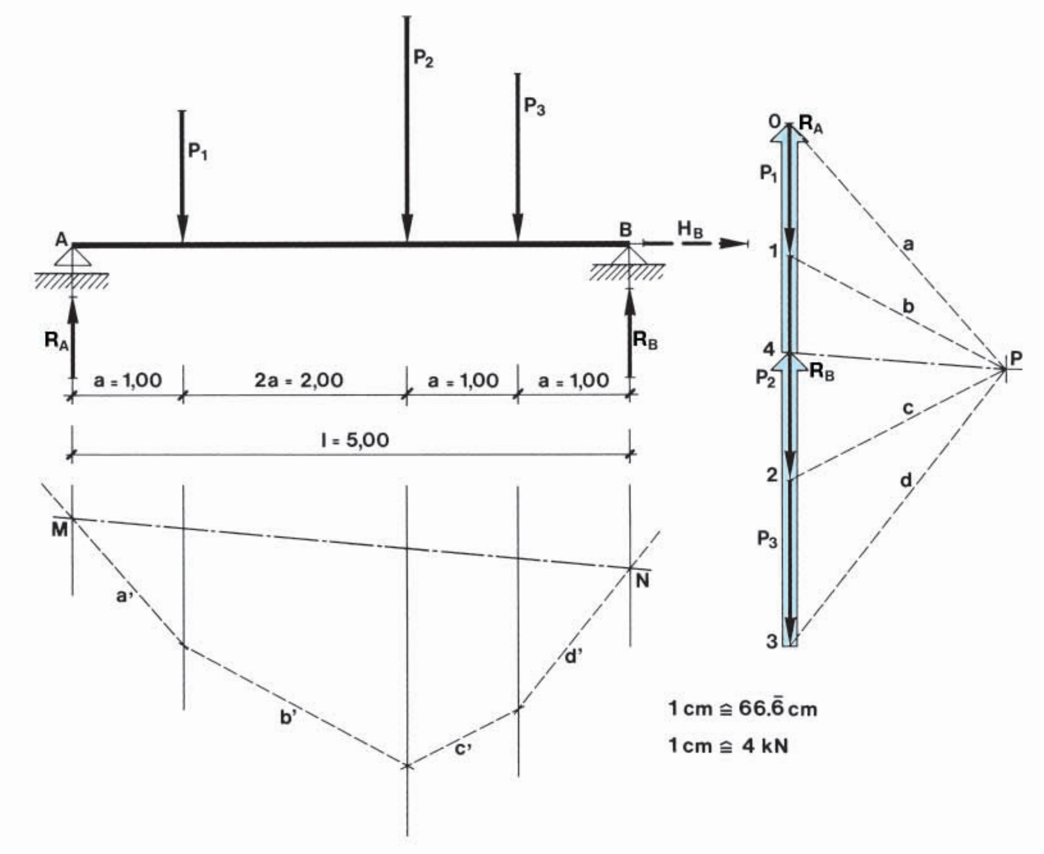
4.2.4 La trave: calcolo delle reazioni vincolari

ESERCIZI SVOLTI

Travi

1 Si richiede il calcolo grafico e analitico delle reazioni vincolari della trave riportata in **figura** appoggiata in A e incernierata in B, caricata di tre carichi concentrati verticali con intensità:

$P_1 = 7$ kN $\quad P_2 = 12$ kN $\quad P_3 = 9$ kN



La linea di azione della reazione R_A, trovandosi in A un appoggio semplice, è perpendicolare all'asse della trave, ossia verticale, ed essendo pure verticali i carichi gravanti, anche la retta di azione della componente R_B relativa alla reazione in B deve essere necessariamente verticale; non esistendo forze orizzontali, la componente H_B ha valore nullo (attenzione: il suo valore è nullo, ma la componente H_B esiste essendoci in B una cerniera, per cui il suo valore deve essere sempre considerato potenzialmente diverso da zero).

Procedimento grafico

Tracciata la retta delle forze con i carichi P_1, P_2, P_3 e proiettata da un polo P, si connettono i carichi con un poligono funicolare, che può essere tracciato a partire da un punto qualsiasi avendo già dedotto che le reazioni sono verticali.
Il primo lato a' e l'ultimo d' intersecano rispettivamente nei punti M ed N le rette di azione delle reazioni: la parallela per il polo P alla congiungente MN, lato di chiusura del poligono funicolare, interseca in 4 la retta delle forze, individuando i segmenti 4-0 e 3-4 che rappresentano rispettivamente in intensità e verso, opposto a quello dei carichi dovendo equilibrarli, le due reazioni R_A e R_B.
Dal grafico risulta:

$R_A = 12{,}20$ kN

$R_B = 15{,}80$ kN

Verifica

$R_A + R_B = \Sigma\, P = 28$ kN

$12{,}20 + 15{,}80 = 28$ kN

Procedimento analitico

Vengono applicate le tre equazioni della statica:

$\mathbf{\Sigma\, P_x = 0}$

l'unica forza orizzontale presente è la H_B per cui si ottiene $H_B = 0$.

$\mathbf{\Sigma\, P_y = 0}$

$R_a + R_b - P_1 - P_2 - P_3 = 0$

$R_A + R_B - 7 - 12 - 9 = 0$

$R_A + R_B = 28$ kN

$\boldsymbol{\Sigma M_B = 0}$

$R_a \cdot l - P_1 \cdot 4 \cdot a - P_2 \cdot 2 \cdot a - P_3 \cdot a = 0$

$R_A \cdot 5{,}00 - 7 \times 4{,}00 - 12 \times 2{,}00 - 9 \times 1{,}00 = 0$

da cui si ottiene:

$R_A = 12{,}20$ kN

Come già è stato detto, per sicurezza di calcolo è opportuno calcolare la R_B, anziché per semplice differenza, sostituendo il valore ottenuto di R_A nella seconda equazione; si applica perciò nuovamente la terza equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto A:

$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0}$

$-R_B \cdot l + P_1 \cdot a + P_2 \cdot 3 \cdot a + P_3 \cdot 4 \cdot a = 0$

$R_B \cdot 5{,}00 - 7 \times 1{,}00 - 12 \times 3{,}00 - 9 \times 4{,}00 = 0$

da cui:

$R_B = 15{,}80$ kN

Verifica
I valori di R_A e R_B vengono sostituiti nella seconda equazione e, se il calcolo è esatto, l'eguaglianza deve essere soddisfatta:

$R_A + R_B = 28$ kN

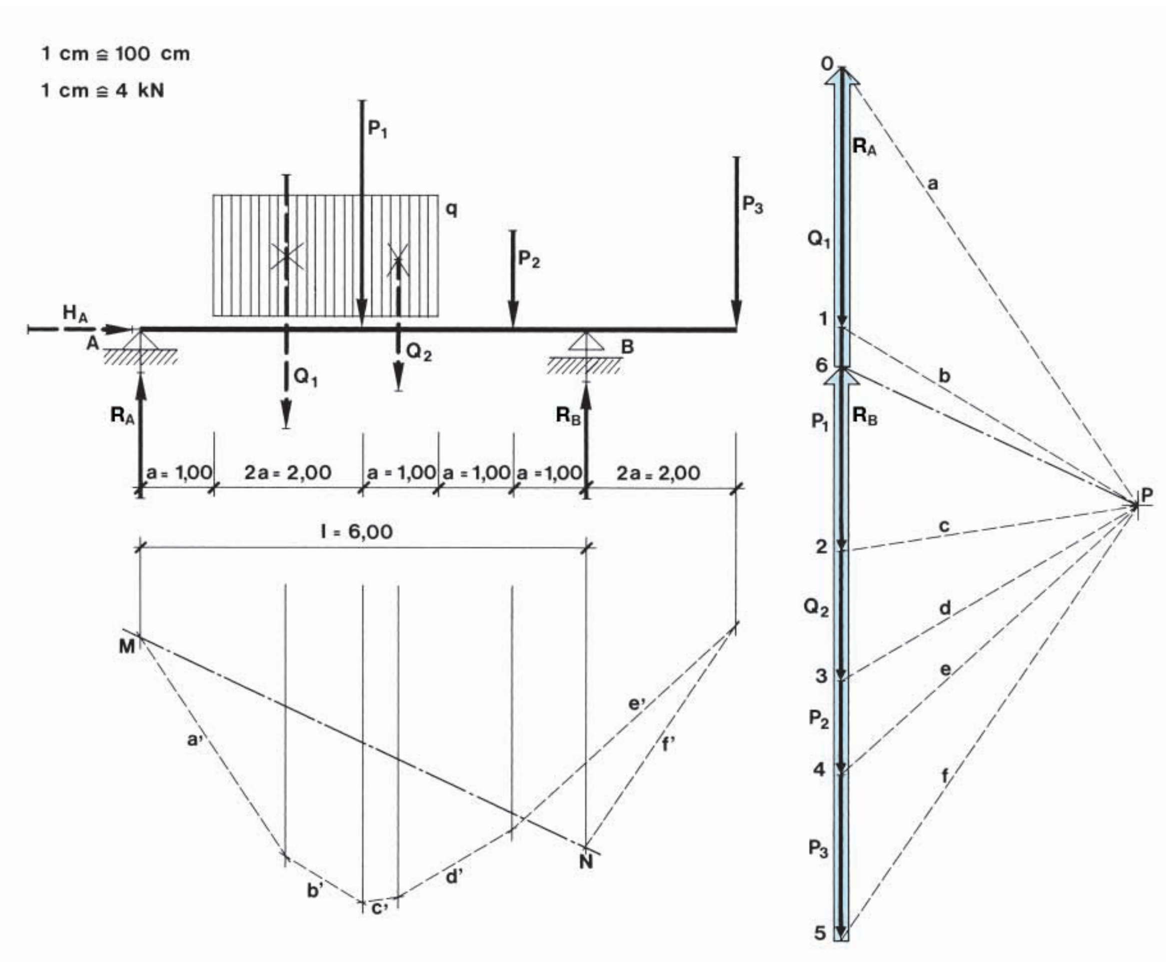
$12{,}20 + 15{,}80 = 28$ kN

28 kN $= 28$ kN

2 Una trave con cerniera in A e appoggio in B presenta in corrispondenza di quest'ultimo uno sbalzo ed è caricata con carichi ripartiti e concentrati disposti come risulta nella **figura** e che presentano le seguenti intensità:

$q = 7$ kN/m $\quad P_1 = 12$ kN $\quad P_2 = 5$ kN $\quad P_3 = 9$ kN

Calcolare graficamente e analiticamente le reazioni vincolari.



Avendo carichi solo verticali perpendicolari alla trave e i piani di appoggio A e in B paralleli al suo asse, le componenti delle reazioni saranno solo verticali, con H_A di valore nullo.
Inoltre, essendo il carico P_1 applicato in un punto facente parte della zona interessata dal carico ripartito, quest'ultimo si considera diviso in due parti, ognuno con intensità totali:

$$Q_1 = q \cdot 2 \cdot a = 7 \times 2{,}00 = 14 \text{ kN}$$

$$Q_2 = q \cdot a = 7 \times 1{,}00 = 7 \text{ kN}$$

Procedimento grafico

Tracciata la retta delle forze così come si incontrano da sinistra a destra e proiettata da un polo P, si connettono le forze sulla trave con un poligono funicolare (senza necessità che passi per qualche punto particolare) il cui primo lato a' e l'ultimo f' intersecano nei punti M ed N le rette di azione delle componenti verticali delle reazioni: la parallela al lato di chiusura MN del poligono funicolare, tracciata per il polo P, individua sulla retta delle forze i segmenti 6-0 e 5-6 che rispettivamente rappresentano, letti nella sequenza indicata, in verso, opposto a quello delle forze, e intensità le componenti delle reazioni R_A e R_B; dal grafico risulta:

$$R_A = 30{,}88 \text{ kN}$$

$$R_B = 16{,}12 \text{ kN}$$

Procedimento analitico

Per le tre equazioni della statica si ha:

$$\boldsymbol{\Sigma P_x = 0}$$

L'unica forza orizzontale applicata è la H_A per cui $H_A = 0$.

$$\boldsymbol{\Sigma P_y = 0}$$

$$R_A + R_B - Q_1 - P_1 - Q_2 - P_2 - P_3 = 0$$

$$R_A + R_B - 14 - 12 - 7 - 5 - 9 = 0$$

$$R_A + R_B = 47 \text{ kN}$$

Tenendo presenti i sensi di rotazione delle forze rispetto al centro dei momenti considerato, si ha:

$$\boldsymbol{\Sigma M_B = 0}$$

$$R_A \cdot l - Q_1 \cdot 4 \cdot a - P_1 \cdot 3 \cdot a - Q_2 \cdot \left(\frac{a}{2} + 2 \cdot a\right) - P_2 \cdot a + P_3 \cdot 2 \cdot a = 0$$

$$R_A \cdot 6{,}00 - 14 \times 4{,}00 - 12 \times 3{,}00 - 7 \times 2{,}50 - \\ - 5 \times 1{,}00 + 9 \times 2{,}00 = 0$$

da cui:

$$R_A \approx 16{,}08 \text{ kN}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0}$$

$$-R_B \cdot l + Q_1 \cdot 2 \cdot a + P_1 \cdot 3 \cdot a + Q_2 \cdot \left(3 \cdot a + \frac{a}{2}\right) + \\ + P_2 \cdot 5 \cdot a + P_3 \cdot 8 \cdot a = 0$$

$$R_B \cdot 6{,}00 - 14 \times 2{,}00 - 12 \times 3{,}00 - 7 \times 3{,}50 + \\ - 5 \times 5{,}00 - 9 \times 8{,}00 = 0$$

da cui:

$$R_B = \approx 30{,}92 \text{ kN}$$

Verifica

$$R_A + R_B = 47 \text{ kN}$$

$$16{,}08 + 30{,}92 = 47 \text{ kN}$$

$$47 \text{ kN} = 47 \text{ kN}$$

3 La trave rappresentata in **figura** è incernierata in A e appoggiata in B con due sbalzi alle estremità; su di essa gravano i seguenti carichi ripartiti:

$$q_1 = 6 \text{ kN/m} \qquad q_2 = 2 \text{ kN/m}$$

e concentrati:

$$P_1 = 9 \text{ kN} \qquad P_2 = 14 \text{ kN}$$

inclinati rispetto all'asse della trave degli angoli:

$$\alpha_1 = 60° \qquad \alpha_2 = 30°$$

Calcolare graficamente e analiticamente le componenti delle reazioni vincolari.

Poiché sulla trave gravano carichi inclinati, che dovranno essere scomposti nelle componenti perpendicolari e parallele all'asse della trave, la reazione della cerniera in A avrà componenti verticale R_A e orizzontale H_A, mentre in B, trattandosi di appoggio semplice, si avrà solo la componente verticale R_B.
I due carichi ripartiti totali hanno intensità:

$$Q_1 = q_1 \cdot 2 \cdot a = 6 \times 2{,}00 = 12{,}00 \text{ kN}$$

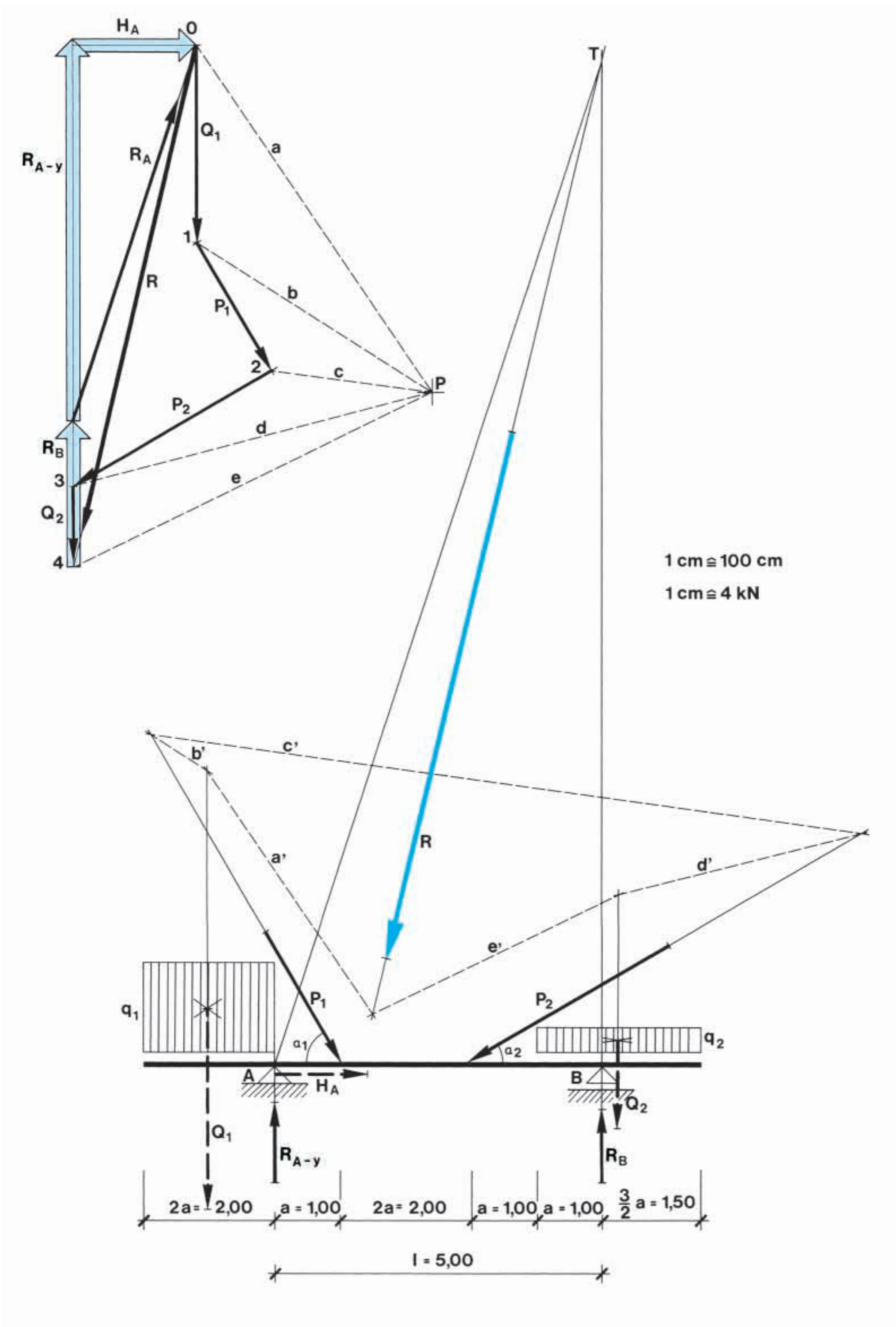
$$Q_2 = q_2 \cdot \left(a + \frac{3}{2} \cdot a\right) = 2 \times 2{,}50 = 5{,}00 \text{ kN}$$

e si pensano applicati nei baricentri dei rispettivi diagrammi.

Procedimento grafico

Tracciato il poligono delle forze come queste si incontrano sulla trave da sinistra a destra e proiettato da un polo P, si connettono le forze con un poligono funicolare che consente di tracciare la risultante R, equipollente al lato di chiusura del poligono delle forze.
In B si ha un appoggio semplice che reagisce con una forza R_B avente linea di azione nota, in quanto perpendicolare all'asse della trave, mentre la reazione in A della cerniera ha retta di azione incognita, che può essere individuata come congiun-

4.2.4 La trave: calcolo delle reazioni vincolari



gente il punto A e l'intersezione T della R_B con la linea di azione della risultante R.
È possibile ora scomporre la R sul poligono delle forze in due componenti rispettivamente parallele alla R_B e alla congiungente AT; quest'ultima rappresenta la reazione R_A della cerniera e dovrà essere scomposta nelle due componenti, H_A parallela e R_{A-y} perpendicolare all'asse della trave.
Si sono ottenute così in verso e intensità le componenti delle reazioni.

Procedimento analitico

Ognuno dei carichi inclinati P_1 e P_2 viene scomposto nelle componenti perpendicolari e parallele all'asse della trave:

$$P_{1-x} = P_1 \cdot \cos \alpha_1 = 9 \cdot \cos 60° = 4{,}50 \text{ kN}$$
$$P_{1-y} = P_1 \cdot \text{sen } \alpha_1 = 9 \cdot \text{sen } 60° \approx 7{,}79 \text{ kN}$$
$$P_{2-x} = P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 14 \cdot \cos 30° \approx 12{,}12 \text{ kN}$$
$$P_{2-y} = P_2 \cdot \text{sen } \alpha_2 = 14 \cdot \text{sen } 30° = 7{,}00 \text{ kN}$$

Applicando le equazioni della statica e considerando il verso delle componenti prima calcolate, si ottiene:

$\boldsymbol{\Sigma P_x = 0}$

$H_A + P_{1-x} - P_{2-x} = 0$

$H_A + 4{,}50 - 12{,}12 = 0$

ossia:

$H_A = +7{,}62$ kN

Il valore è positivo, per cui la componente H_A è diretta verso destra.

$\boldsymbol{\Sigma P_y = 0}$

$R_A + R_B - Q_1 - P_{1-y} - P_{2-y} - Q_2 = 0$

$R_A + R_B - 12{,}00 - 7{,}79 - 7{,}00 - 5{,}00 = 0$

ossia:

$R_A + R_B = 31{,}79$ kN

$\boldsymbol{\Sigma M_B = 0}$

$$R_A \cdot l - Q_1 \cdot (a + l) - P_{1-y} \cdot 4 \cdot a - P_{2-y} \cdot 2 \cdot a +$$
$$+ Q_2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{3}{2} \cdot a\right) - a\right] = 0$$

$$R_A \cdot 5{,}00 - 12{,}00 \times 6{,}00 - 7{,}79 \times 4{,}00 +$$
$$- 7{,}00 \times 2{,}00 + 5{,}00 \times 0{,}25 = 0$$

ossia:

$R_A \approx 23{,}18$ kN

$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0}$

$$- R_B \cdot l - Q_1 \cdot a + P_{1-y} \cdot a + P_{2-y} \cdot 3 \cdot a +$$
$$+ Q_2 \cdot \left[l + \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{3}{2} \cdot a\right) - a\right] = 0$$

$$R_B \cdot 5{,}00 + 12{,}00 \times 1{,}00 - 7{,}79 \times 1{,}00 +$$
$$- 7{,}00 \times 3{,}00 - 5 \times 5{,}25 = 0$$

e quindi:

$R_B \approx 8{,}61$ kN

Verifica

$R_A + R_B = 31{,}79$ kN

$23{,}18 + 8{,}61 = 31{,}79$ kN

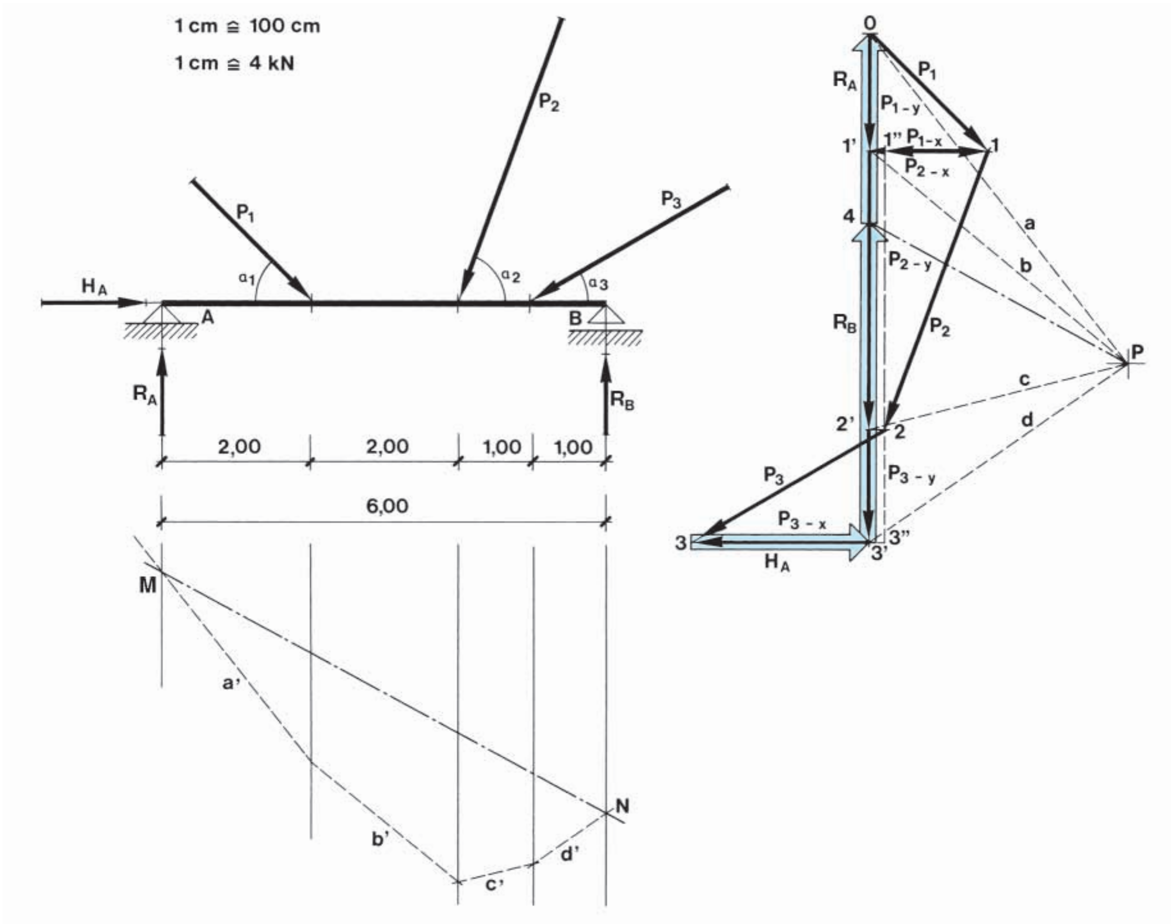
$31{,}79$ kN $= 31{,}79$ kN

4 Determinare con il solo procedimento grafico le reazioni ai vincoli della trave riportata in **figura**, incernierata in *A* e appoggiata in *B*, gravata di tre carichi concentrati con intensità:

$P_1 = 9$ kN $\quad P_2 = 16$ kN $\quad P_3 = 12$ kN

le cui rette di azione formano con l'asse della trave rispettivamente gli angoli:

$\alpha_1 = 45°$ $\quad \alpha_2 = 70°$ $\quad \alpha_3 = 30°$



4.2.4 La trave: calcolo delle reazioni vincolari

Procedimento grafico

Verrà seguito un procedimento diverso da quello applicato nell'esercitazione precedente, ma già visto in precedenza (pag. 122 del testo), che consente di determinare anche le componenti dei carichi non perpendicolari alla trave. Tracciato il poligono delle forze, i suoi vertici vengono proiettati su due rette, una passante per il punto 0 e perpendicolare all'asse della trave e l'altra parallela a esso e passante per l'ultimo punto 3.
La prima retta 0-1′-2′-3′, sulla quale si ottengono le componenti P_y normali alla trave, viene proiettata da un polo P, connettendo quindi le sole componenti P_y sulla trave con il poligono funicolare a'-b'-c'-d'; tracciata per il polo P la parallela al lato di chiusura MN, si individuano i segmenti 4-0 e 3′-4, che rappresentano in verso e intensità le componenti verticali R_A e R_B delle reazioni, che valgono rispettivamente:

$R_A \approx 10{,}30$ kN $\qquad R_B \approx 17{,}16$ kN

Sull'orizzontale tracciata per il punto 3 si ottiene invece la somma algebrica delle intensità relative alle componenti P_x, per cui si viene subito a conoscere nel segmento 3-3′, letto in scala forze, verso e intensità della componente orizzontale H_A della cerniera in A che vale:

$H_A \approx 9{,}60$ kN

Infatti le componenti orizzontali sono:

$P_{1-x} = 1\text{-}1' \qquad P_{2-x} = 1\text{-}1'' \qquad P_{3-x} = 3\text{-}3''$

Effettuando la somma algebrica si ha:

$1\text{-}1'' = P_{1-x} - P_{2-x}$

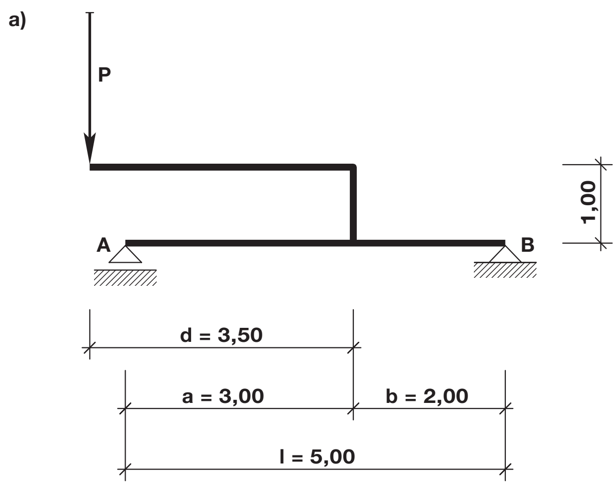
con verso positivo, ed essendo:

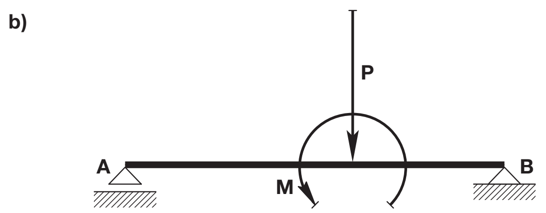
$1'\text{-}1'' = 2\text{-}2' = 3'\text{-}3''$

si ha:

$H_A = -\,[(3\text{-}3'') - (3'\text{-}3'')] = -\,P_{3-x} + (3'\text{-}3'') = 9{,}60$ kN

5 Calcolare analiticamente le reazioni vincolari della trave rappresentata in **figura**, essendo $P = 80$ kN.





La trave è costituita da un elemento unico e il carico P, rispetto alla sezione C, genera il momento:

$M = P \cdot d = 80 \times 3{,}50 = 280$ kN m

Applicando il momento di trasporto il carico P viene traslato sulla sezione C dove si deve aggiungere il momento M.
Si procede quindi al calcolo delle reazioni vincolari.

Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$\boldsymbol{\Sigma P_x = 0}$

e quindi $H_B = 0$.
Equilibrio alla traslazione verticale:

$\boldsymbol{\Sigma P_y = 0}$

$R_A + R_B - P = 0 \qquad R_A + R_B = 80$ kN

Equilibrio alla rotazione:

$\boldsymbol{\Sigma M_B = 0}$

$R_A \cdot l - P \cdot b - M = 0$

$R_A \cdot 5{,}00 - 80 \times 2{,}00 - 280 = 0$

$R_A = 88$ kN

$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0}$

$-R_B \cdot l + P \cdot b - \mathrm{M} = 0$

$R_B \cdot 5{,}00 - 80 \times 3{,}00 + 280 = 0$

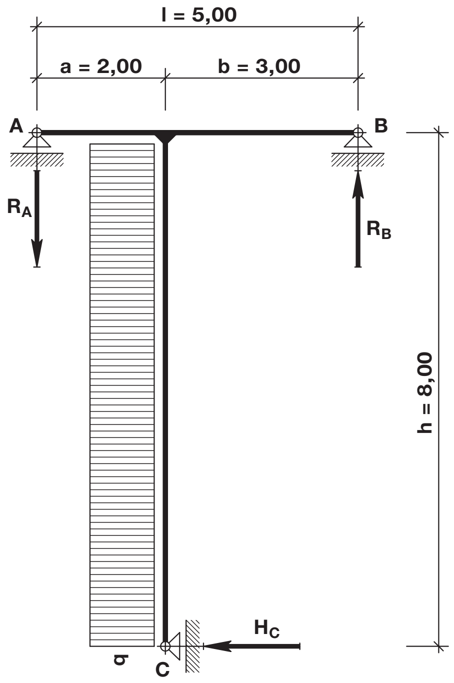
$R_B = -\,8$ kN

Verifica:

$R_A + R_B = 88 - 8 = 80 \text{ kN} = P$

Portali isostatici

6 Calcolare le reazioni vincolari della struttura rappresentata in **figura**, nella quale l'asta verticale è soggetta a un carico ripartito uniforme $q = 30$ kN/m.



Verifica della isostaticità della struttura:

$$v = 1 \cdot a + 2 \cdot c_e + 3 \cdot i = 3 + 0 + 0 = 3 = 3 \cdot n = 3$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$\mathbf{\Sigma P_x = 0}$$

$$H_c + q \cdot h = 0$$

$$H_c = -30 \times 8{,}00 = -240 \text{ kN}$$

Equilibrio alla traslazione verticale:

$$\mathbf{\Sigma P_y = 0}$$

$$R_A + R_B = 0$$

$$R_A = -R_B$$

Equilibrio alla rotazione:

$$\mathbf{\Sigma M_B = 0}$$

$$R_A \cdot l + H_c \cdot h - q \cdot \frac{h^2}{2} = 0$$

$$R_A \cdot 5{,}00 + 240 \times 8{,}00 - 30 \times \frac{8{,}00^2}{2} = 0$$

$$R_A = -\frac{960}{5{,}00} = -192 \text{ kN}$$

$$\mathbf{\Sigma M_A = 0}$$

$$-R_B \cdot l - q \cdot \frac{h^2}{2} + H_c \cdot h = 0$$

$$R_B \cdot 5{,}00 + 30 \times \frac{8{,}00^2}{2} - 240 \times 8{,}00 = 0$$

$$R_B = +\frac{960}{5{,}00} = +192 \text{ kN}$$

7 Il portale rappresentato in **figura** è vincolato a terra con un appoggio semplice in A e una cerniera in B, ed è soggetto ai seguenti carichi come in figura:

$q_1 = 10$ kN/m $q_2 = 15$ kN/m $P = 30$ kN

e al momento $M_D = 20$ kNm applicato sul vertice D.
Calcolare analiticamente le reazioni vincolari.

Il portale è isostatico in quanto:

$$v = 1 \cdot a + 2 \cdot c_e + 3 \cdot i = 1 + 2 + 0 = 3 = 3 \cdot n = 3$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$\mathbf{\Sigma P_x = 0}$$

$$H_B = -q_1 \cdot h = -10 \times 8{,}00 = -80 \text{ kN}$$

Equilibrio alla traslazione verticale:

$$\mathbf{\Sigma P_y = 0}$$

$$R_A + R_B - P - q_2 \cdot l_1 = 0$$

$$R_A + R_B = P + q_2 \cdot l_1 = 30 + 15 \times 2{,}00 = 60 \text{ kN}$$

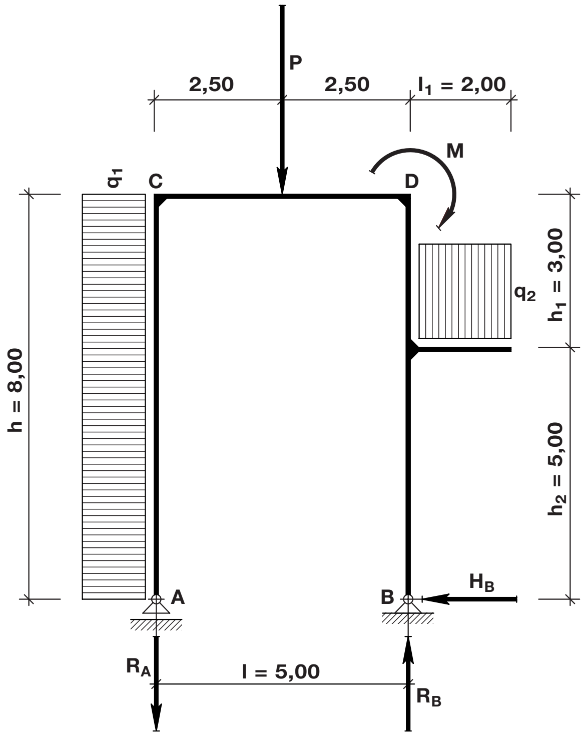
Equilibrio alla rotazione:

$$\mathbf{\Sigma M_B = 0}$$

$$R_A \cdot l + q_1 \cdot \frac{h^2}{2} - P \cdot \frac{l}{2} + q_2 \cdot \frac{l_1^2}{2} - M_D = 0$$

$$R_A \cdot 5{,}00 + 10 \times 32{,}00 - 30 \times 2{,}50 + 15 \times 2{,}00 + 20 = 0$$

4.2.4 La trave: calcolo delle reazioni vincolari



$$R_A = -\frac{295}{5{,}00} = -\,59 \text{ kN}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_A = 0}$$

$$-R_B \cdot l + q_1 \cdot \frac{h^2}{2} + P \cdot \frac{l}{2} + q_2 \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l\right) + M_D = 0$$

$$R_B \cdot 5{,}00 - 10 \times 32 - 30 \times 2{,}50 - 15 \times 2{,}00 \times 6{,}00 - 20 = 0$$

$$R_B = +\frac{595}{5{,}00} = +\,119 \text{ kN}$$

Verifica:

$$R_A + R_B = -\,59 + 119 = 60 \text{ kN}$$