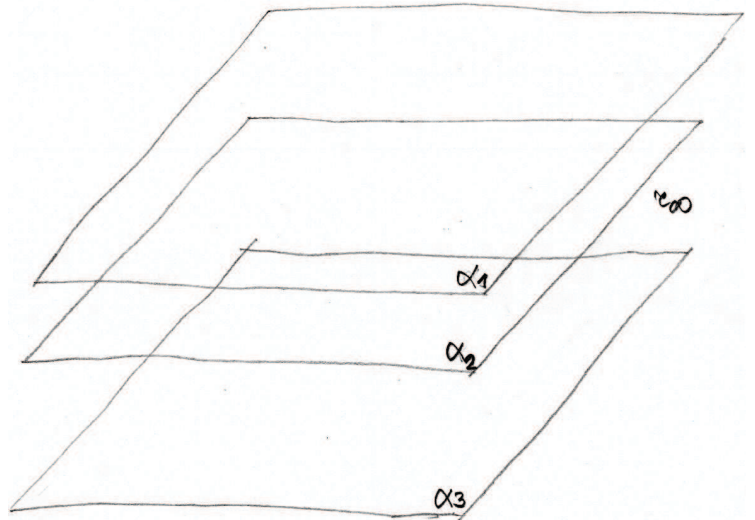
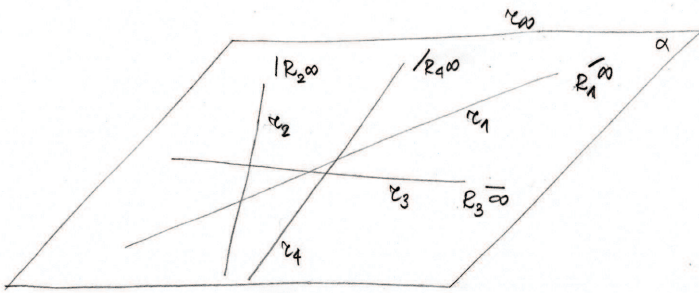


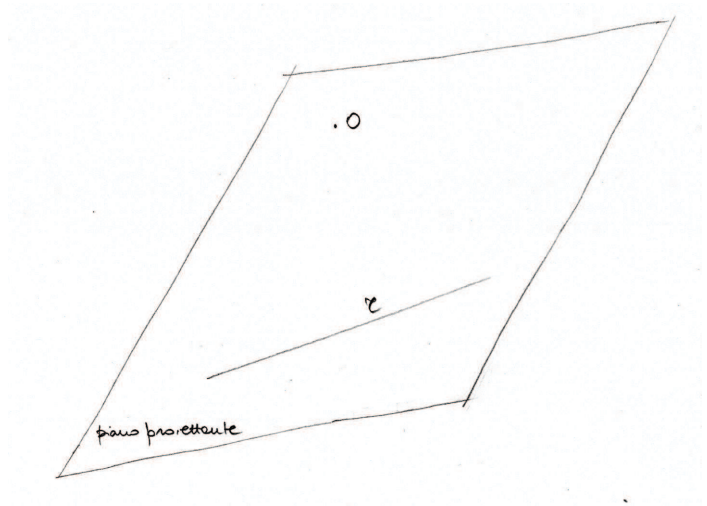
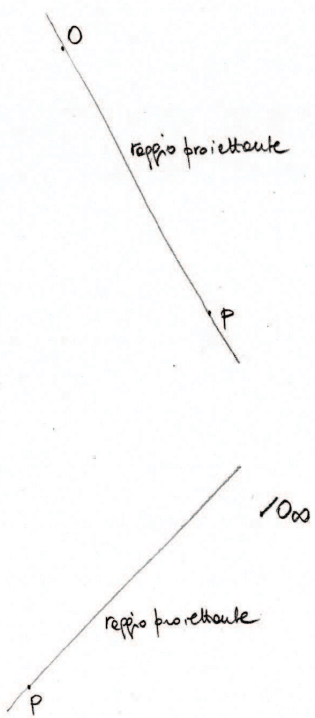
Consideriamo due rette s ed r incidenti in P e facciamo ruotare la retta s intorno a un suo punto S , le posizioni che assumerà s_1, s_2, s_3, \dots determineranno altrettanti punti P_1, P_2, P_3, \dots . Quando la retta s diventa parallela ad r , il punto P di intersezione si allontana indefinitamente sulla retta r , ovvero tende all'infinito. Il punto P_∞ (punto

improprio o *punto all'infinito*) identifica la *direzione* di una retta e di quelle ad essa parallele. Ogni retta è costituita da infiniti punti propri e un punto improprio.

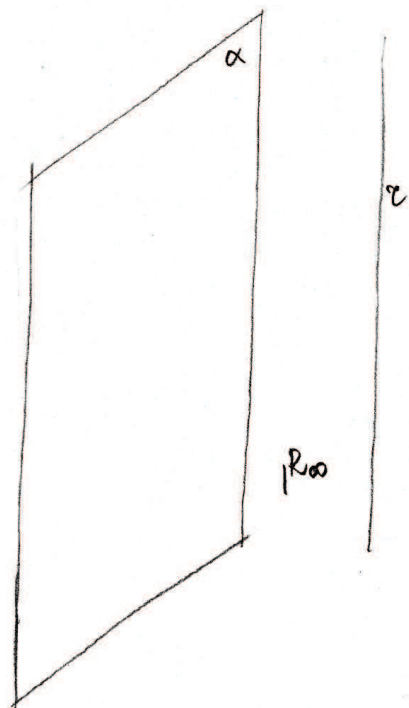
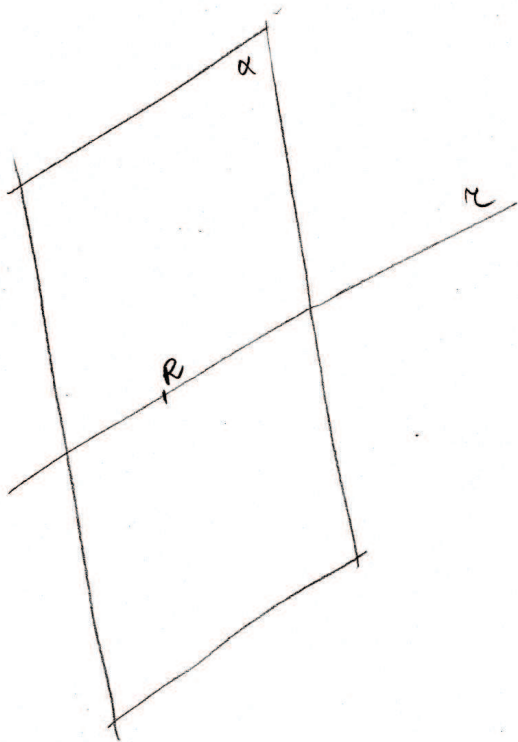


Le infinite direzioni (punti impropri) delle rette contenute in un piano α definiscono la *giacitura* di un piano, ovvero la *retta impropria* o *retta all'infinito* r_∞ . Ogni piano ha una retta impropria che è comune a tutti i piani ad esso paralleli.
Si definisce *piano improprio* o *piano all'infinito* l'insieme di

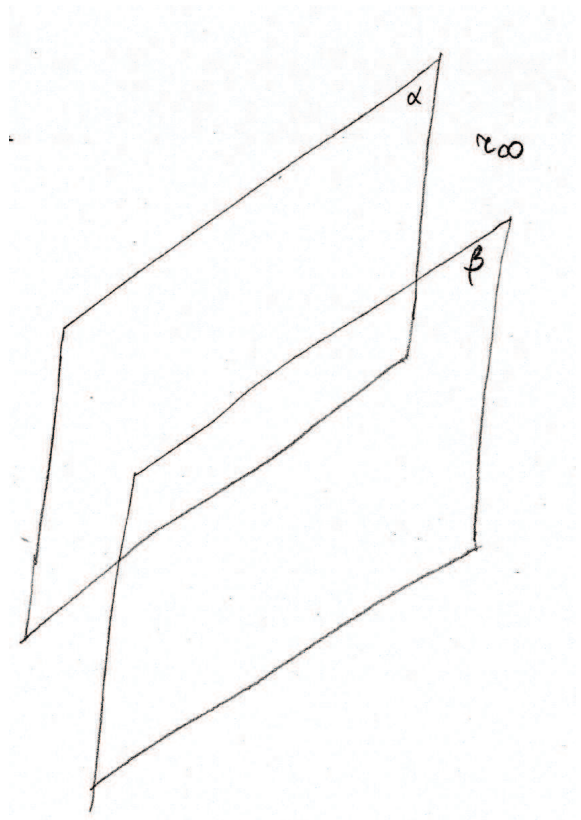
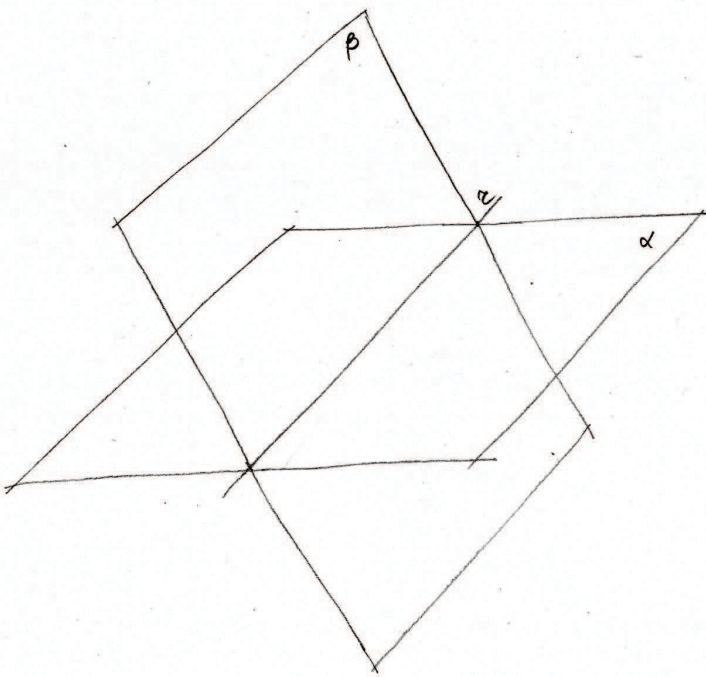
tutte le rette e di tutti i punti impropri.



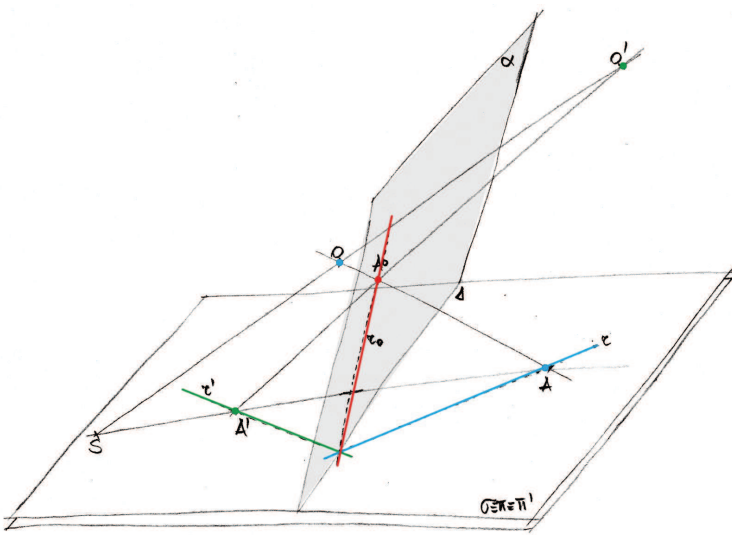
Proiettare da un punto O (proprio o improprio) detto *centro di proiezione* un altro punto P (proprio o improprio) significa costruire la retta congiungente OP , detta *raggio proiettante*.
Proiettare da O (proprio o improprio) una retta r significa costruire il piano congiungente Or , detto *piano proiettante*.



Sezionare con un piano α una retta r significa trovare il punto R comune ad α e a r . Il punto R è la *traccia* della retta sul piano.
Se la retta è parallela al piano la traccia sarà il punto improprio R_{∞} direzione della retta r .



Sezionare con un piano α un altro piano β significa determinare la loro retta di intersezione. Tale retta si chiama *traccia* di α su β . Se i piani α e β sono paralleli la retta di intersezione sarà impropria e sarà data dalla giacitura dei due piani (r_{∞}).



Tra le trasformazioni proiettive maggiormente utilizzate ed applicate nei metodi della geometria proiettiva va considerata l'omologia.
Consideriamo un punto A_0 appartenente ad un piano α , proiettiamo questo punto da due centri O e O' su un piano σ , otterremo le proiezioni A e A' rispettivamente da O e O' . Estendendo l'operazione a tutti i punti del piano α si ottengono due piani sovrapposti π e π' generati rispettivamente dalle proiezioni dei punti di α da O e da

O' .
In particolare A sarà la proiezione di A_0 da O su π , mentre A' sarà la proiezione di A_0 da O' su π' . I punti A e A' si diranno omologhi.
I due piani sovrapposti $\pi \equiv \pi'$, proiezioni di un terzo piano α da due centri distinti, sono omologici. Un'omologia piana è la relazione generata sui piani sovrapposti ed è definita da un asse e da un centro rispettivamente traccia s del piano α sui piani sovrapposti e traccia S

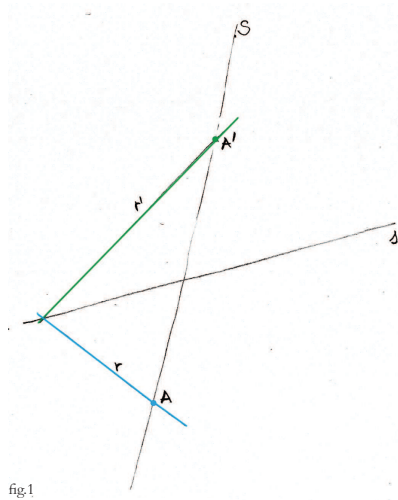


fig.1

della congiungente i centri O e O' sempre sui piani sovrapposti.

Un'omologia è assegnata attraverso il suo centro S , l'asse s e una coppia di punti o una coppia di rette corrispondenti. (fig.1)

La corrispondenza tra π e π' è biunivoca e le proprietà che la regolano sono le seguenti:

1. Coppie di rette corrispondenti si intersecano sull'asse s dell'omologia;

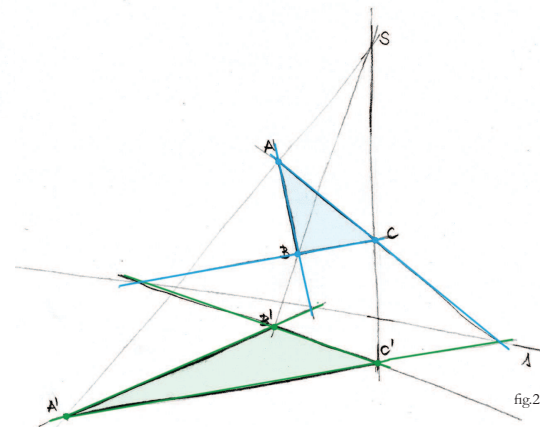
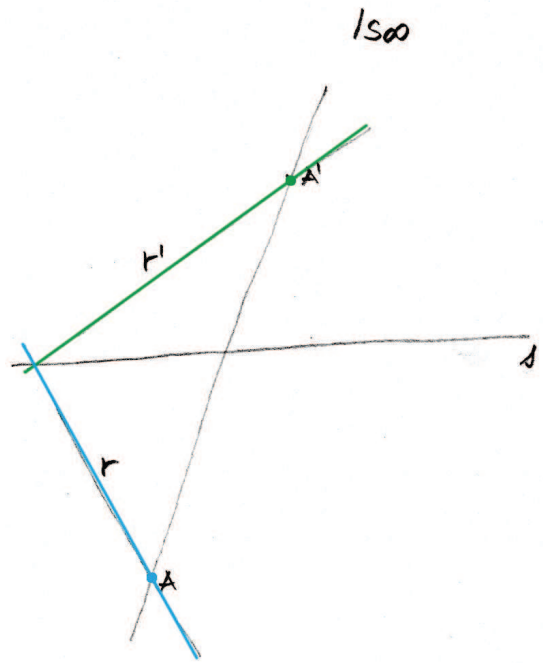
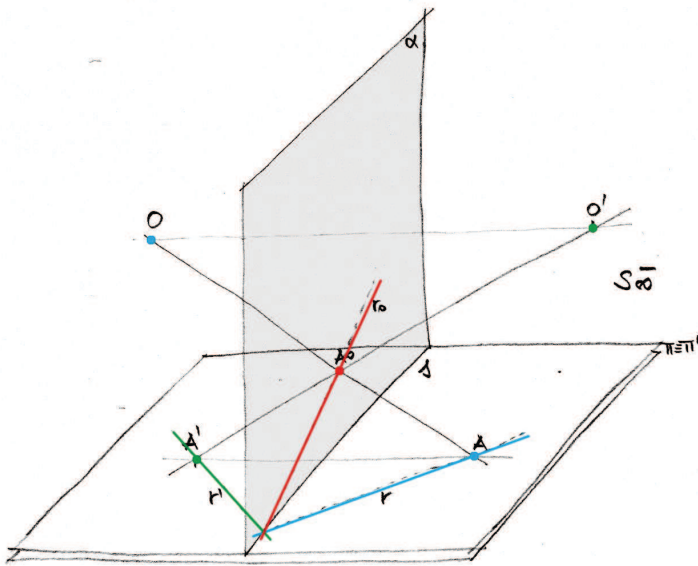


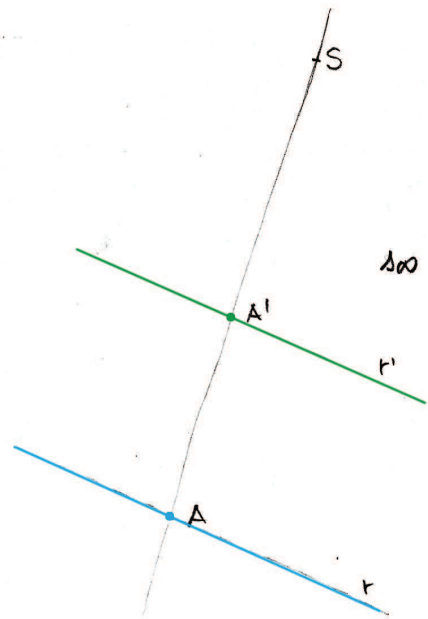
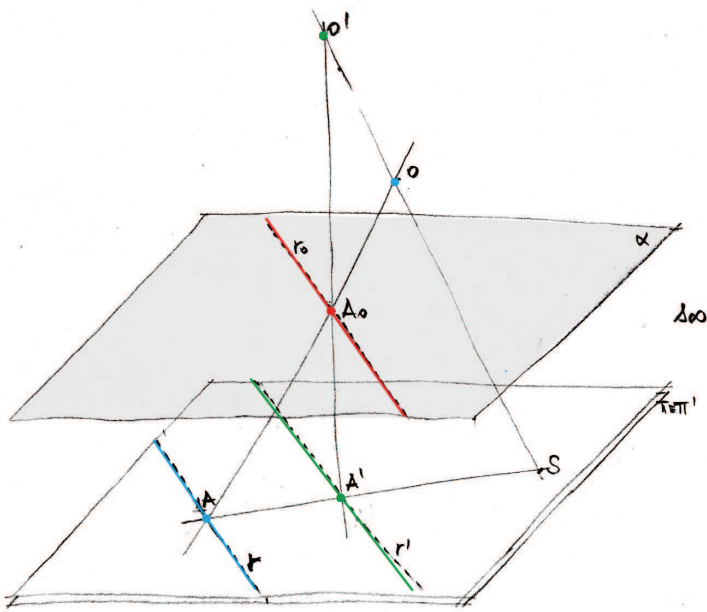
fig.2

2. Coppie di punti corrispondenti sono allineati con il centro S dell'omologia.

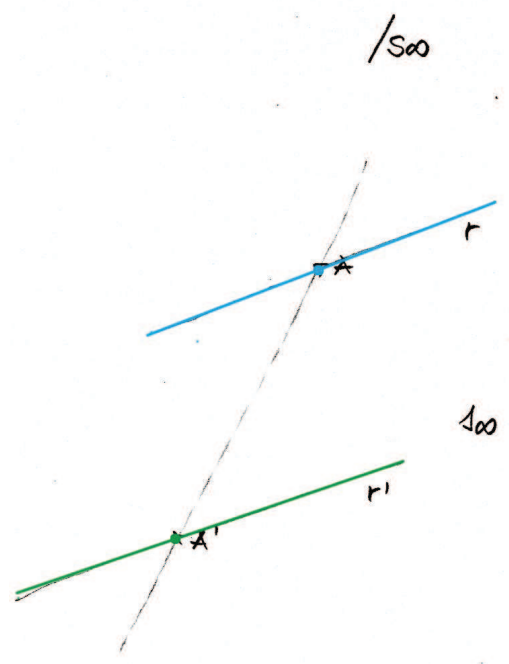
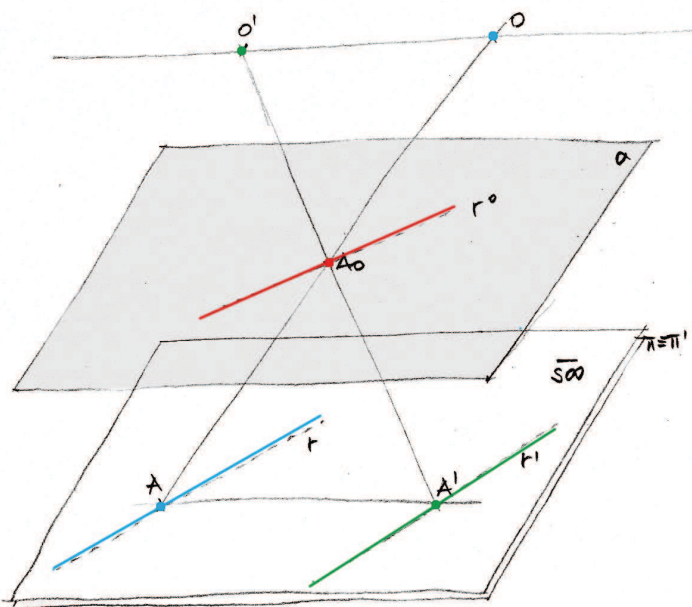
In generale possiamo affermare che proiettando una figura piana da due centri distinti, propri o impropri, sopra un medesimo piano $\pi \equiv \pi'$ si ottengono due figure tra loro omologiche; viceversa, se diamo nel piano due figure omologiche, esse potranno sempre pensarsi come proiezione di una stessa figura piana da due centri distinti. (fig.2)



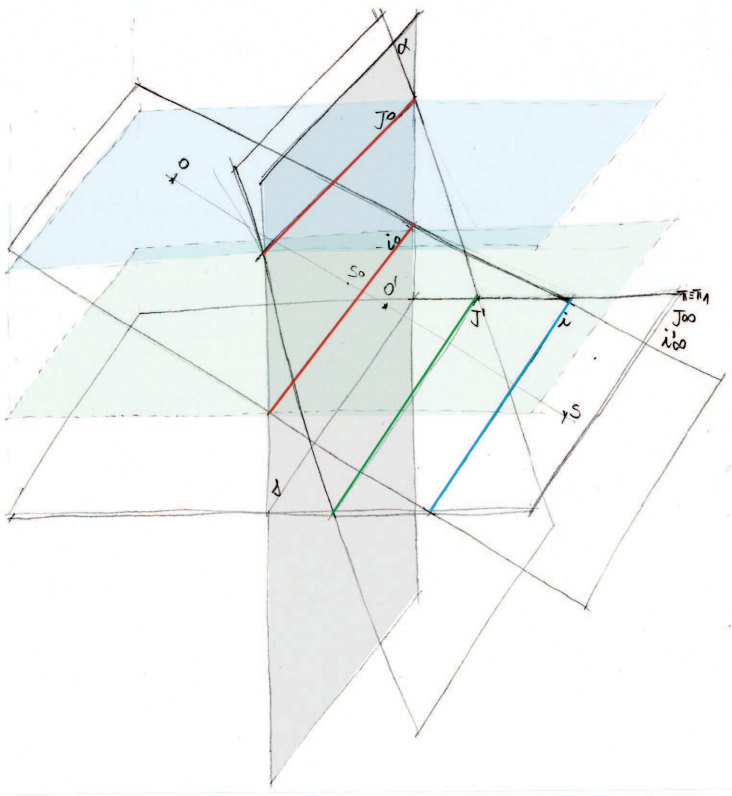
Quando nello spazio la retta congiungente i due centri O e O' è parallela al piano $\pi = \pi'$, oppure quando i due centri sono entrambi impropri, l'omologia è detta *affinità omologica* e sarà definita da un centro improprio e da un asse proprio.



Quando nello spazio il piano α è parallelo al piano $\pi = \pi'$, l'omologia è detta *omotetia* e sarà definita da un centro proprio e da un asse improprio.



Quando nello spazio la retta congiungente i due centri O e O' è parallela al piano $\pi \equiv \pi'$, oppure quando i due centri sono entrambi impropri e il piano α è parallelo al piano $\pi \equiv \pi'$, l'omologia è detta *traslazione* o *congruenza* e sarà definita da un centro e da un asse improprio.



Si definiscono rette limiti di un'omologia tra due piani sovrapposti $\pi = \pi'$, le due rette rispettivamente di π e di π' corrispondenti alla retta impropria dei due piani. Indicata con j_∞ la retta impropria del piano π , la corrispondente j' nel piano π' è una delle rette limite. Analogamente indicata con i_∞ la retta impropria del

piano π' , la corrispondente i nel piano π è l'altra retta limite. Assegnata una omologia attraverso centro S , asse s e una coppia di punti corrispondenti A e A' , è possibile costruire le rette limiti come corrispondenti J' e I dei punti impropri J_∞ e I'_∞ delle rette a e a' cui appartengono A e A' . (fig.1)

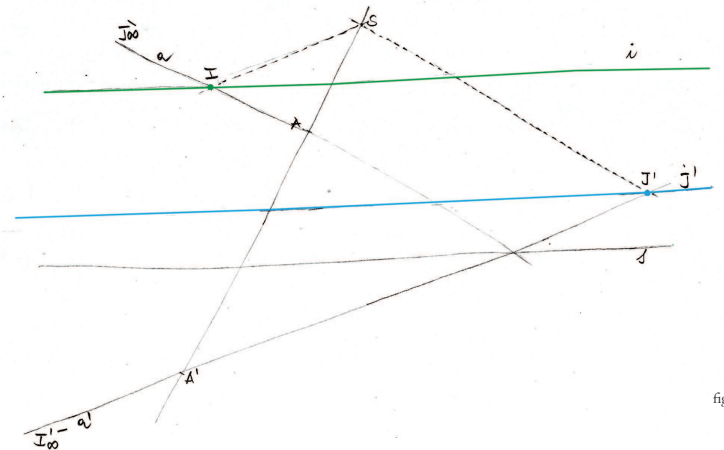


fig.1

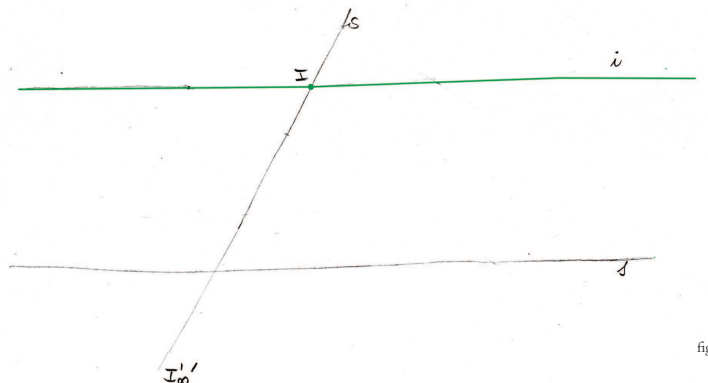
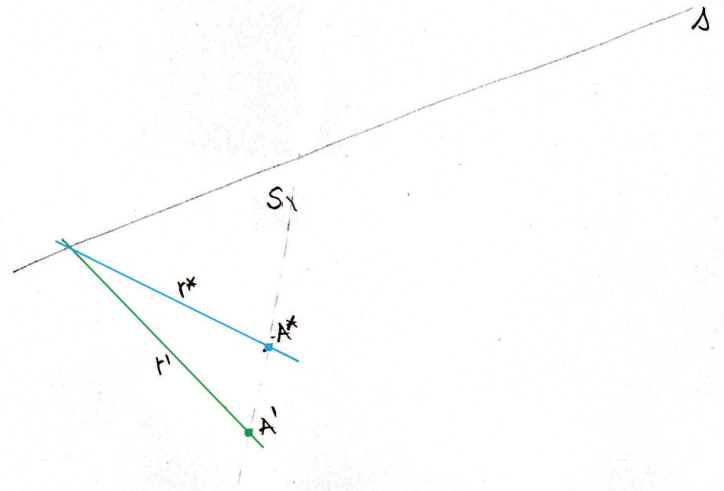
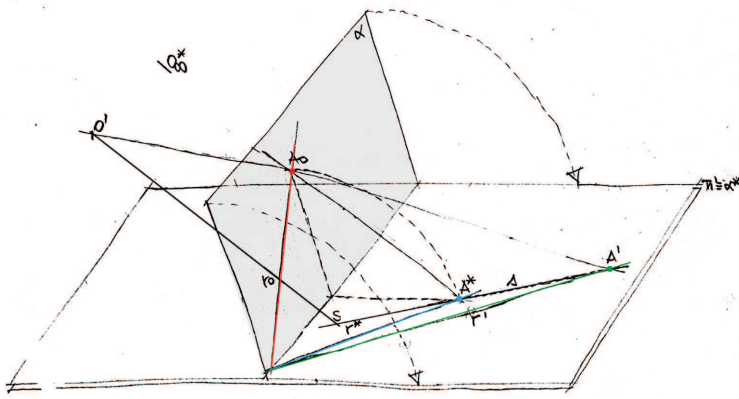


fig.2

Analogamente assegnata un'omologia attraverso il centro S , l'asse s e la retta limite i , è possibile determinare una coppia di punti corrispondenti congiungendo I (appartenente ad i) con il centro S . Il corrispondente di I sarà il punto I'_∞ improprio nella direzione della retta SI . (fig.2)



Consideriamo un punto A_0 appartenente ad un piano α , proiettiamo questo punto dal centro O' su un piano σ , otterremo la proiezione A' . Ribaltiamo il piano α su σ intorno alla loro retta di intersezione: il punto A_0 assumerà la posizione A' . Estendendo l'operazione a tutti i punti del piano α si ottengono due piani sovrapposti π'

e α' generati rispettivamente dalle proiezioni da O' dei punti di α e dal suo ribaltamento. Tale ribaltamento può però considerarsi come la proiezione degli enti contenuti in α da O'' avente la direzione ortogonale al piano bisettore del diedro formato da α e π' e attraversato nel ribaltamento. La relazione tra

i punti e le rette di π' , ottenuti dalla proiezione da O' di punti e di rette di α , e i punti e le rette di α' (sovrapposto a π'), ottenuti dal ribaltamento di α su π' (ovvero dalla proiezione su α' da O'') è un'omologia, in particolare un'omologia di ribaltamento. Tale omologia è definita dall'asse s -intersezione tra α e π' ,

il centro S -proiezione su $\alpha' \equiv \pi'$ di O' da O'' - e da una coppia di punti o rette corrispondenti.